遅延ポテンシャルの導出

かしゃるふぁ

2019 年 7 月 28 日

概要

このノートでは遅延ポテンシャルの導出を行う。また遅延ポテンシャルから、Lienard-Wiechert ポテンシャルと Jefimenko の公式を導く。

目次

1 電磁場の運動方程式

まず時空 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ に電磁場の源泉として、電荷と電流が存在しているときの電磁場の時間発展を求める。電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ は事前に与えられているとして、スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて解析する。ただし、Gauge 条件には Lorentz gauge 条件[*1]を用いる。

Lorentz gauge 条件

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1}$$

[*1] この条件を初めて用いたのはローレンツ (Lorenz) である。オランダのヘンドリック・ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928) とデンマークのルードヴィヒ・ローレンツ (Ludvig Valentin Lorenz 1829-1891) の違い。二人が独立に発見した屈折率と物質の固有振動数との関係はローレンツ-ローレンツの式と呼ばれる。サイクロトロンで有名なのはアメリカのローレンス (Ernest Orlando Lawrence、1901-1958) である。

を課した場合 (ここで c は光速度) のスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ に対する運動方程式は、それぞれ次のような電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$、電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ による源泉を持つ波動方程式となる。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\phi(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

以下ではこの方程式を解いて具体的な解を求めていく。

2　遅延ポテンシャルの導出

2.1　Green 関数

源泉を持つ線形微分方程式を解くことは、一般に Green 関数 (伝搬関数とも呼ばれる) を用いる方法で行うことができる。これから源泉を持つ波動方程式に対する Green 関数の方法を説明していく。源泉を持つスカラー波動方程式 (2) に対する Green 関数が求まれば、源泉を持つベクトル波動方程式 (3) に対する Green 関数も簡単に求めることができる。したがって、ここではスカラー波動方程式 (2) 式に対する Green 関数の方法を説明していく。

Green 関数の定義

源泉を持つスカラー波動方程式 (2) に対する Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ を、以下の方程式を満たす関数と定義する。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')}{\partial t^2} - \Delta_{\boldsymbol{r}}G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{4}$$

すなわち、この Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ は時空上の一点 $(\boldsymbol{r}',t')$ に単位電荷が存在するときのスカラーポテンシャルを表している。Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ が求められたならば、スカラー波動方程式 (2) 式の解は次のように表現する事ができる。

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')\rho(\boldsymbol{r}',t') \tag{5}$$

実際、(5) 式をスカラー波動方程式 (2) 式に代入すれば、Green 関数の定義より、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')}{\partial t^2} - \Delta_{\boldsymbol{r}}G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')\right)\rho(\boldsymbol{r}',t') \tag{6}$$

$$= 4\pi\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt'\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\rho(\boldsymbol{r}',t') \tag{7}$$

$$= 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{8}$$

となり、$\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')\rho(\boldsymbol{r}',t')$ が解であることが分かる。したがって、Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ を求めることが出来れば任意の電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ が作るスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$ を求めることができる。よって、問題は Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ を求めることに帰着された。

2.2　遅延条件

Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ に対して偏微分方程式 (4) 式を課すだけでは、境界条件の任意性があるため Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ はただひとつに決定されない。そこで、Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ にさらなる条件を加える必要がある。普通、次のような「遅延条件」を課す。

遅延条件

$G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ に対する次の条件を遅延条件と呼ぶ。

$$G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t') = 0 \qquad \text{ただし、} t < t' \tag{9}$$

そもそも Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ は時刻 t' に空間上の一点 $\boldsymbol{r}'$ に単位電荷を置き、すぐに取り除いた時ののスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ を表していた。空間上のある地点に電荷をおいたとき、新たに加えた電荷により生じる電場 (静電ポテンシャル) の変化は有限の速度 (光速度) で伝わっていく。すなわち、この変化が他の地点に到達するのは有限の正の時間後である。したがって、この遅延条件は電荷をおいたことによる影響は過去に伝わることはないことを表している。すなわち、遅延条件は物理における「因果関係」を表しているといえる。また、この遅延条件を満たす Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ は「遅延 Green 関数 (retarded Green function)」と呼ばれる。

2.3　Green 関数の計算

以下、遅延条件のもとで Green 関数を具体的に計算していく。まず簡単化された Green 関数を定義する。

簡単化された Green 関数

源泉を持つスカラー波動方程式に対する簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ は以下の方程式を満たす関数だと定義される。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta_{\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})\delta(t) \tag{10}$$

(10) 式において、$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$、$t \to t - t'$ と置き換えれば、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial (t - t')^2} - \Delta_{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') = 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t') \tag{11}$$

さらに、

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial t} = \frac{\partial G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial (t - t')}\frac{d(t - t')}{dt} \tag{12}$$

$$= \frac{\partial G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial (t - t')} \tag{13}$$

より、

$$\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')}{\partial (t - t')^2} \tag{14}$$

が成り立つ。成分ごとに考えれば同様に

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') = \Delta_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') \tag{15}$$

も成り立つから、(11) 式は次のようになる。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')}{\partial t^2} - \Delta_{\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{16}$$

したがって、(4) 式に従う Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ は簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて、次のように表すことができる。

$$G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t') = G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t') \tag{17}$$

また、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ に対する遅延条件は、

$$G(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad \text{ただし、} t < 0 \tag{18}$$

となる。

以下では Fourier 変換を用いて、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ の具体的な形を求める。簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ の Fourier 変換を $\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ とすれば、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ は次のように表される。

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{19}$$

(19) 式を (10) 式に代入することで、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ の Fourier 変換 $\tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ を求める。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)\frac{\partial^2 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}}{\partial t^2} && (20)\\
&= -\frac{\omega^2}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} && (21)\\
\Delta_{\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)\Delta_{\boldsymbol{r}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} && (22)\\
&= -\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} && (23)
\end{aligned}$$

である。さらにデルタ関数 $\delta(x)$ の Fourier 積分表示を用いる。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \tag{24}$$

すると (10) 式の右辺は次のようになる。

$$4\pi\delta(\boldsymbol{r})\delta(t) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{25}$$

以上より、(10) 式は次のようになる。

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\left(|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \tilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \frac{4\pi}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{26}$$

よって、

$$\left(|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega) = 4\pi \tag{27}$$

である。したがって、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ の Fourier 変換 $\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ は次のように求められる。

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \tag{28}$$

以上により Fourier 変換 $\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ が求まったので、(19) 式の積分を実行すれば簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ を求めることができる。しかし、積分変数 $\boldsymbol{k},\omega$ が動くとき、被積分関数 $\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ の分母が 0 になる場合があり、それにより積分値が不定になってしまう。被積分関数の分母 $|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ は実数であり、$|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ が 0 になることが積分の不定性を生み出している。そこで無限小の虚数を導入し、$|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ が 0 にならないようにすればよい。具体的には、ε を無限小の正数として、$i\varepsilon$ という式を $|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ のどこかに足すか引くかすればよい。

$i\varepsilon$ という式を $|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ のどこかに足すか引くかする方法は無数に存在する。どのような $i\varepsilon$ の導入が正しい手法なのであろうか？実は、この変更の仕方の差異が、計算の結果として得られる簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ の境界条件の違いをもたらすことになる。ここでは、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ の境界条件として「遅延条件」(9) 式を課している。この境界条件に対する $|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ の変更の仕方は、

$$|\boldsymbol{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \longrightarrow |\boldsymbol{k}|^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\varepsilon\right)^2 \tag{29}$$

という変更の仕方である。この変更の結果として得られる簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ が「遅延条件」(9) 式を満たしていることは、あとで確かめる。

簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r},t)$ の Fourier 変換 $\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ を

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\varepsilon\right)^2} \tag{30}$$

として、(19) 式の積分を実行する。(28) 式を (19) 式に代入すると、

$$G(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\varepsilon\right)^2} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k} \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\varepsilon\right)^2} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{32}$$

と表される。まず $\boldsymbol{k}$ についての積分を実行する。積分すべき式を

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k} \frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2 - \left(\frac{\omega}{c} + i\varepsilon\right)^2} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{33}$$

とおく。ここで $\boldsymbol{k}$ 空間での極座標を用いるが $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角が極座標の θ になるようにとる。す

なわち、$\boldsymbol{r}$ 方向を $\boldsymbol{k}$ 空間の z 軸とする。すると、$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr\cos\theta$ となるから、I は

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\frac{k^2\sin\theta}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{ikr\cos\theta} && (34)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\frac{k^2}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}\int_0^\pi d\theta e^{ikr\cos\theta}\sin\theta && (35)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\frac{k^2}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}\left[\frac{1}{ikr}e^{ikr\cos\theta}\right]_0^\pi && (36)\\
&= \frac{1}{\pi i}\frac{1}{r}\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right) && (37)
\end{aligned}
$$

となる。さらに、

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{-ikr} &= \int_0^{-\infty}dk\frac{-k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{ikr} && (38)\\
&= \int_{-\infty}^0 dk\frac{k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{ikr} && (39)
\end{aligned}
$$

を用いると、

$$
I=\frac{1}{\pi i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^\infty dk\frac{k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{ikr} \tag{40}
$$

となる。さらに変形をして、

$$
I=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^\infty dk\left(\frac{1}{k-\frac{\omega}{c}-i\varepsilon}+\frac{1}{k+\frac{\omega}{c}+i\varepsilon}\right)e^{ikr} \tag{41}
$$

となる。この積分を実行するには複素解析での留数定理を用いる。そこで、以下の積分を考える。

$$
\int_{-\infty}^\infty dz\frac{e^{irz}}{z-a} \tag{42}
$$

この積分値を求めるために留数定理を用いるが、そのためには閉じた積分経路で考えなければならない。この積分をするのによい積分経路 C は半径 R の上半平面上の半円である。また、$\frac{e^{irz}}{z-a}$ は $z=a$ で一位の極を持ち、その留数は、

$$
Res(a)=\left.\frac{e^{irz}}{[z-a]'}\right|_{z=a}=e^{ira} \tag{43}
$$

であるから、留数定理より、

$$
\int_C dz\frac{e^{irz}}{z-a}=\int_{-\infty}^\infty dz\frac{e^{irz}}{z-a}+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}dz\frac{e^{irz}}{z-a}=\begin{cases}2\pi ie^{ira} & (\mathrm{Im}(a)>0)\\ 0 & (\mathrm{Im}(a)<0)\end{cases} \tag{44}
$$

となる。ここで、$R\to\infty$ したときの C_R 上での積分値を求めることができれば良い。C_R 上で $z=Re^{i\theta}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R}dz\frac{e^{irz}}{z-a}\right| &\leq \int_{C_R}|dz|\frac{\left|e^{irz}\right|}{|z-a|} && (45)\\
&\leq \frac{R}{R-a}\int_0^\pi d\theta e^{-rR\sin\theta} && (46)\\
&< \frac{\pi}{r(R-a)} \qquad \text{(Jordan の不等式)} && (47)
\end{aligned}
$$

したがって、$R \to \infty$ とすると、

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} dz \frac{e^{irz}}{z-a} = 0 \tag{48}$$

でとなる。よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{irz}}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i e^{ira} & (\mathrm{Im}(a) > 0) \\ 0 & (\mathrm{Im}(a) < 0) \end{cases} \tag{49}$$

となる。

以上より、求めたかった積分 I は、

$$I = \frac{1}{r} e^{ir\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)} \tag{50}$$

となる。この時点で $\varepsilon \to 0$ とすれば、

$$I = \frac{1}{r} e^{ir\frac{\omega}{c}} \tag{51}$$

である。これにより、簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ の表式が得られる。

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{r}\delta\left(\frac{r}{c} - t\right) \tag{53}$$

また、この簡単化された Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t)$ が遅延条件を満たしていることを確かめる必要があるが、$G(\boldsymbol{r}, t)$ はデルタ関数の定義より $t = \frac{r}{c} > 0$ 以外で 0 であるから、明らかに遅延条件を満たしている。よって、(53) 式が求めるべき遅延条件を満たす簡単化された Green 関数である。

以上の結果より、もともとの源泉を持つスカラー波動方程式に対する Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ は次のように与えられる。

$$G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t') = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} - (t-t')\right) \tag{54}$$

2.4　遅延ポテンシャル

Green 関数 $G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t')$ が求まったので、(5) 式より源泉を持つスカラー波動方程式の一般解が次のように与えられる。

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} - (t-t')\right)\rho(\boldsymbol{r}', t') \tag{55}$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{56}$$

源泉を持つベクトル波動方程式は成分ごとに考えればスカラー波動方程式と同等になるから、上の結果より源泉を持つベクトル波動方程式の一般解は次の式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{57}$$

一般解を得たと結論付けるためには、あと上で得たスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ が Lorentz gauge 条件 (1) 式を満たしていることを確かめなければならない。

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{58}$$

$$\mathrm{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{59}$$

であるが、$t_r := t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ (t_r は遅延時間と呼ばれる) とおけば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) = \frac{\partial}{\partial t_r} \rho\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \tag{60}$$

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{\partial t_r} \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r \tag{61}$$

であり、一方

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &= \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}'} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{\partial t_r} \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}'} t_r + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \qquad (62) \\ &= -\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{\partial t_r} \cdot \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \qquad (63) \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \tag{64}$$

よって、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \qquad (65) \\ &= \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) + \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (66) \\ &= \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_r} \rho\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) + \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right) \right\} - \frac{1}{c} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t_r\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (67) \end{aligned}$$

ここで第 1 項は連続の方程式により 0 であり、第 2 項は Gauss の定理により無限遠における面積分となり、$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}, t\right)$ が $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ で速やかに 0 になることから、第 2 項は 0 となる。したがって、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{68}$$

となり Lorentz gauge 条件を満たしていることが示された。

以上より遅延条件下での Maxwell 方程式のポテンシャルに関する解が得られた。このポテンシャルは遅延ポテンシャルと呼ばれている。この遅延ポテンシャルはリエナール (Alfred Marie Lienard, 1869-1958) が 1898 年に、ドイツの地球物理学者ヴィーヒェルト (Johann Emil Wiechert, 1861-1928) が 1900 年に初めて導出したらしい。

遅延ポテンシャル

遅延条件のもとでの (2) 式と (3) 式の解は、次の遅延ポテンシャルで与えられる。

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{69}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{70}$$

このとき、$t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} =: t_r$ は遅延時間 (retarded time) と呼ばれている量である。

Maxwell 方程式の解としては、この遅延ポテンシャルに対して波動方程式と Lorentz gauge 条件を満たす $\phi_0(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t)$ を加えることができる。すなわち、

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) + \phi_0(\boldsymbol{r},t) \tag{71}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) + \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t) \tag{72}$$

ただし、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_0(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\phi_0(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{73}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{74}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi_0(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{75}$$

である。

2.5 先進ポテンシャル

遅延ポテンシャルに対して先進ポテンシャルと呼ばれるポテンシャルが存在する。先進ポテンシャルは遅延条件の代わりに以下で定義される先進条件を満たす Green 関数により、構成されるポテンシャルである。

先進条件

$G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t')$ に対する次の条件を先進条件と呼ぶ。

$$G_{adv}(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t') = 0 \qquad \text{ただし、} t > t' \tag{76}$$

先進条件は遅延条件とは逆に過去にのみ変化の影響が伝わっていくことを表している。

先進条件を課したときの (2) 式と (3) 式の解となる先進ポテンシャル $\phi_{adv}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{A}_{adv}(\boldsymbol{r},t)$ は、遅延ポテンシャルの表式中の $t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ を $t + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ と変更することによって与えられる。

先進ポテンシャル

遅延条件のもとでの (2) 式と (3) 式の解は、次の先進ポテンシャルで与えられる。

$$\phi_{adv}(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho\left(\boldsymbol{r}', t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{77}$$

$$\boldsymbol{A}_{adv}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) \tag{78}$$

古典電磁気学において、先進ポテンシャルは、遅延ポテンシャルに比べてあまり使われないが、素粒子物理学で使われる場の量子論においては重要な働きをするらしい[*2]

[*2] 聞きかじったことがある

3　Lienard-Wiechert ポテンシャル

遅延ポテンシャルの式を用いることにより、既知の運動をする 1 つの点電荷によって作られる電磁場のポテンシャルを求めることができる。点電荷 q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_p(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_p(t)$ と表すと、これによる電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ は次の式で表される。

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p) \tag{79}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = q\boldsymbol{v}_p\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p) \tag{80}$$

これを遅延スカラーポテンシャルの式に代入して、

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) &(81)\\ &= q\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_p\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right) &(82)\end{aligned}$$

となる。あとは積分を計算すれば良い。しかし $\boldsymbol{r}_p(t)$ が $\boldsymbol{r}'$ の関数となっているため簡単に積分を実行することができない。そこで、$t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ と置き、積分を次のように変更する。

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= q\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \int_{\mathbb{R}} dt_r \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)\right)\delta\left(t_r-\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right) &(83)\\ &= q\int_{\mathbb{R}} dt_r \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)\right)\delta\left(t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) &(84)\\ &= q\int_{\mathbb{R}} dt_r \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|}\delta\left(t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|}{c}\right) &(85)\end{aligned}$$

ここで、$f(t_r) = t_r - t + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r)|}{c}$ とおき、$\delta(f(t_r))$ について考える。

$$\frac{d}{dt_r}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)| = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p)\cdot\boldsymbol{r}_p'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p|} \tag{86}$$

であるから、

$$f'(t_r) = 1-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p)\cdot\boldsymbol{r}_p'}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p|} \tag{87}$$

よって、デルタ関数の性質より、

$$\delta(f(t_r)) = \sum_{f(t_{rn})=0}\frac{1}{|f'(t_r)|}\delta(t_r-t_{rn}) \tag{88}$$

となる。ここで $f(t_r)=0$ の解を t_{r0} のみだと仮定する。すると

$$\begin{aligned}\delta(f(t_r)) &= \frac{1}{|f'(t_{r0})|}\delta(t_r-t_{r0}) &(89)\\ &= \frac{1}{|1-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0}))\cdot\boldsymbol{r}_p'(t_{r0})}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0})|}|}\delta(t_r-t_{r0}) &(90)\end{aligned}$$

であるから、

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = q\int_{\mathbb{R}} dt_r \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|}\delta\left(f(t_r)\right) \tag{91}$$

$$= q\int_{\mathbb{R}} dt_r \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|}\frac{1}{|1-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0}))\cdot\boldsymbol{r}_p'(t_{r0})}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0})|}|}\delta(t_r-t_{r0}) \tag{92}$$

$$= q\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_{r0}\right)|}\frac{1}{|1-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0}))\cdot\boldsymbol{r}_p'(t_{r0})}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0})|}|} \tag{93}$$

$$= \frac{q}{\left||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_{r0}\right)|-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0}))\cdot\boldsymbol{r}_p'(t_{r0})/c\right|} \tag{94}$$

見やすくするために $\boldsymbol{R}(t_{r0})=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_{r0}), \boldsymbol{r}_p'(t_{r0})=\boldsymbol{v}_p(t_{r0})$ とすれば、

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{|R(t_{r0})-\boldsymbol{R}(t_{r0})\cdot\boldsymbol{v}_p(t_{r0})/c|} \tag{95}$$

である。

ここで、$f(t_r)=t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r)|}{c}=0$ の解が本当に一つなのかを考える。因果律からの要求により、$t>t_r$ であるが、この条件は $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|>0$ を考えれば $t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r)|}{c}=0$ が解をもつための必要条件のなかに含まれている。このとき解となる t_r とは、光速で伝わる信号が電荷のある点 $\boldsymbol{r}_p(t_r)$ から観測点 $\boldsymbol{r}$ まで伝搬する時間がちょうど $t-t_r$ に一致するような時間である。$f(t_r)=t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r)|}{c}=0$ となる解が一つしか無いことは以下のようにして分かる。観測地点 $\boldsymbol{r}$ と観測時刻 t を 4 次元座標の原点 O にとり、O を頂点とする光円錐を作る。O に対して絶対的な過去となる領域を取り囲む光円錐の下半分の表面は、光速で伝搬する信号がそこから発せられて、ちょうど O 点に到着できるような点の全体を表している。この超曲面と点電荷の運動の世界線との交点こそが $f(t_r)=t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r)|}{c}=0$ の解である。常に電荷の速さは光速度 c よりも小さいから、電荷の運動の世界線はいたるところで時間軸に対して光すいの面の傾きよりも小さい傾きを持つ (空間座標軸については光すいよりの傾きよりも大きい)。したがって、電荷の運動の世界線が光すいと交わる点は多くても一点に限られることになる。

ベクトルポテンシャルに関しても同様に求めることができ、スカラーポテンシャルと合わせて Lienard-Wiechert (リエナール-ヴィーフェルト) ポテンシャルと呼ばれる。

Lienard-Wiechert ポテンシャル

点電荷 q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_p(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_p(t)$ としたとき、電荷の作るスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ は以下の式で与えられる。

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{R(t_r)-\boldsymbol{R}(t_r)\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)/c} \tag{96}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{q\boldsymbol{v}_p(t)}{c\left(R(t_r)-\boldsymbol{R}(t_r)\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)/c\right)} \tag{97}$$

ここで、

$$\boldsymbol{R}(t_r):=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t_r) \tag{98}$$

であり、$t_r=t_r(t)$ は以下の式の解である。

$$t_r-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p\left(t_r\right)|}{c}=0 \tag{99}$$

Lienard-Wiechert ポテンシャルから電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を計算するには以下の式に代入すればよい。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{100}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{101}$$

しかし、Lienard-Wiechert ポテンシャルの式は t の関数ではなく t_r の関数となっていることから、単純に計算することはできない。そこで、あらかじめ t_r に対する微分を求めておく必要がある。(99) 式を t で微分することにより、

$$\frac{\partial t_r}{\partial t}-1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}=0 \tag{102}$$

であり、また

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \tag{103}$$

である。ここで、$\frac{\partial R}{\partial t_r}$ を求める。

$$\frac{\partial R^2}{\partial t_r}=2R\frac{\partial R}{\partial t_r} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R^2}{\partial t_r}&=\frac{\partial\boldsymbol{R}^2}{\partial t_r} &(105)\\&=2\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t_r} &(106)\\&=-2\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r) &(107)\end{aligned}$$

より、

$$\frac{\partial R}{\partial t_r}=-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{R} \tag{108}$$

である。したがって、

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} - 1 - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{cR}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 0 \tag{109}$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{cR}} \tag{110}$$

次に座標による微分 $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r$ を求める。(99) 式より

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{r}} t_r + \frac{1}{c}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} R = 0 \tag{111}$$

であるが、ここで

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} R = \frac{\partial R}{\partial t_r}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r + \mathrm{grad}_{\boldsymbol{R}} R \tag{112}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{R}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r + \frac{\boldsymbol{R}}{R} \tag{113}$$

であるから、

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{r}} t_r - \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{R}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} t_r + \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{R} = 0 \tag{114}$$

よって、

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{r}} t_r = -\frac{\boldsymbol{R}}{c\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_p(t_r)}{c}\right)} \tag{115}$$

となる。この準備により、Lienard-Wiechert ポテンシャルから電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を計算することができる。結果だけ書くと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = q\frac{1-\frac{v_p^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\boldsymbol{v}_p}{c}\cdot\boldsymbol{R}\right)^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}_p}{c}R\right) + q\frac{1}{c^2\left(R - \frac{\boldsymbol{v}_p}{c}\cdot\boldsymbol{R}\right)^3}\boldsymbol{R}\times\left\{\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}_p}{c}R\right)\times\frac{\partial \boldsymbol{v}_p}{\partial t}\right\} \tag{116}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{E} \tag{117}$$

となる。ここで右辺の量は全て時刻 t_r によるものであるが、この t_r は遅延ポテンシャルの表式に現れる t_r と異なることには注意する。

4 Jefimenko の公式

最後に遅延ポテンシャルの公式 (69)、(70) 式より、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を求める。スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ が既知のときに電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を求めるには、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{118}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{119}$$

を計算すればよい。

まず、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を計算する。

$$\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}} \left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\right] \tag{120}$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \left[\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\right] \tag{121}$$

$$\tag{122}$$

ここで、

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{123}$$

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right) = \frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}t_r \tag{124}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{125}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{126}$$

であるから、

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\phi(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \left[-\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} - \frac{1}{c}\frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right] \tag{127}$$

となる。一方、

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t} \tag{128}$$

$$= \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r} \tag{129}$$

となる。以上より電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}' \left[\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{1}{c}\frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right] \tag{130}$$

となる。

次に磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を計算する。

$$\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}'\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\right] \tag{131}$$

$$= \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}'\left[\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\right] \tag{132}$$

ここで、

$$\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial J_k(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \tag{133}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial J_k(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x_j}\right]\boldsymbol{e}_i \tag{134}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial J_k(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\partial x_j}\right)\right]\boldsymbol{e}_i \tag{135}$$

$$= -\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial J_k(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\partial x_j}\right]\boldsymbol{e}_i \tag{136}$$

$$= -\frac{1}{c}\mathrm{grad}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\times\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r} \tag{137}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{138}$$

であるから、

$$\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}'\left[\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\right] \tag{139}$$

$$= \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}'\left[-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right] \tag{140}$$

$$= \frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{r}'\left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right] \tag{141}$$

となり、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が求まった。

以上により、時間変動する電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ や電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が既知の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$、すなわち電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が与えられたときの Maxwell 方程式の解が得られた。この式は Jefimenko の公式または Jefimenko 方程式と呼ばれている。

Jefimenko の公式

(時間変動していてもよい) 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 及び電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が既知であり、この電流密度と電荷密度以外に起因する電磁場が存在しない場合の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は Maxwell 方程式の解として次の式で与えられる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\iiint_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{r}'\left[\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\rho\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right] \tag{142}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\iiint_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{r}'\left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t_r\right)}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right] \tag{143}$$

ここで t_r は以下の式で定義されている遅延時間である。

$$t_r:=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} \tag{144}$$

ここで電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ の第 1 項は Coulomb の法則、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の第 1 項は Biot-Savart の法則と同じ形になっており、電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 及び電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が時間変化しない場合にはそれぞれ Coulomb の法則、Biot-Savart の法則に一致する。これにより、Jefimenko の公式が Coulomb の法則、Biot-Savart の法則の時間変化が存在する場合への拡張になっていることが分かる。また、電流の時間変化に起因する電磁場の項 (電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ の第 3 項、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の第 2 項) は互いに大きさが等しく、互いに垂直である。また、Coulomb の法則と Biot-Savart の法則によって定まる電磁場の項は $\frac{1}{x^2}$ のオーダーで減衰するのに対し、電流の時間変化に起因する電磁場の項は $\frac{1}{x}$ のオーダーで減衰する (つまり球面波である)。そのため時間変化する電荷、電流が限られた領域内のみに存在する系において、電荷、電流のごく近くでは電磁場は静電磁場のように振る舞い、遠方では電流の時間変化と同じ時間変化をする電磁場だと見ることができる。

以上の議論を見ると、任意の系における電磁場が求められるように感じられるかもしれないが、Jefimenko の公式は系の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ や電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ が分かっている場合にのみ、すなわち系の全荷電粒子の運動が分かっている場合にのみ、電磁場を完全に求めることができることを表している。しかし、一般に全荷電粒子の運動が分かっていることはないことに注意が必要である。